GRUNDWISSEN MATHEMATIK

7. BIS 11. JAHRGANGSSTUFE

Inhalt

Grundwissen Analysis

Grundwissen Stochastik

Grundwissen Geometrie

Version Oktober 2024, Bildnachweis: Pixabay

Funktion

Eine Funktion f ordnet jedem x-Wert genau einen y-Wert zu.

Funktionsvorschrift: $f: x \mapsto \underbrace{5x+1}_{\text{Funktionsterm}}$

Definitionsmenge D: alle Zahlen, die man einsetzen darf.	*Wertemenge W: alle Zahlen, die herauskommen können.*
x nennt man Argument	*$f(x)$ nennt man Funktionswert*

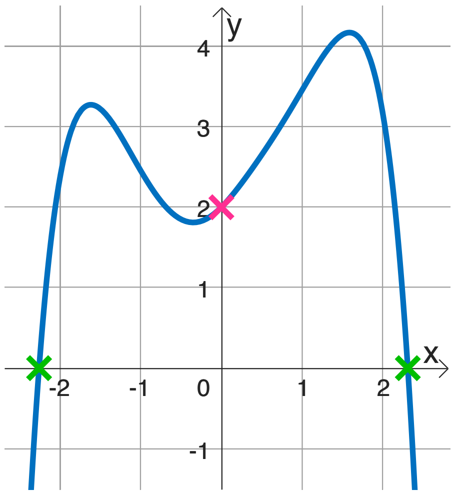
Oft gibt man bei einer Funktion auch die Funktion**gleichung** an:

$f(x) = 5x + 1$ oder $y = 5x + 1$

Graph einer Funktion

Der Graph einer Funktion f wird G_f genannt.

- Wie zeichnet man einen Graphen?
  → z.B. über eine *Wertetabelle*
- Schnittpunkte mit den Achsen:
  - mit der y-Achse: Setzte $x = 0$
  - mit der x-Achse: Setze $f(x) = 0$
  (Auch den y-Wert angeben, da ein Punkt immer zwei Koordinaten hat.)
- Nullstellen
  Alle x-Werte, für die gilt: $f(x) = 0$
- Schnittpunkt zweier Graphen
  Setzte die Funktionsterme gleich und löse nach x auf.



Gleichung

Eine Gleichung verbindet zwei Terme mit einem Gleichheitszeichen.

z.B. $x - 5 = 5x + 1$

Setzt man für die Variable eine Zahl ein und erhält auf beiden Seiten den gleichen Wert (*wahre Aussage*), so ist diese Zahl eine Lösung der Gleichung.

Wie viele Lösungen kann es geben?	
$0 = 1$ oder $x^2 = -1$	**Keine** Lösung
$2x = 4$	**Eine** Lösung: $x = 2$
$x^2 = 4$	**Zwei** Lösungen: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$
...	...
$x = x$	**Jede Zahl** ist eine Lösung

Grundmenge G: Alle Zahlen, die man für die Variable einsetzen darf.
Lösungsmenge L: Alle Lösungen.

Äquivalenzumformung: Die Lösung(en) ändern sich nicht:

$$x + 6 = 8 \quad |-6$$
$$x = 2$$

Vorsicht: Wenn man z.B. durch x teilt, kann sich die Lösungsmenge ändern.

Bsp: Gib über der Grundmenge $G = \mathbb{N}$ die Lösung(en) der Gleichung an:

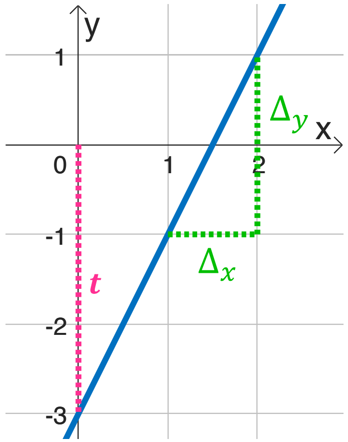
$$(x-5)(x+3)x = 0$$

→ $L = \{0; 5\}$ da -3 keine natürliche Zahl und damit keine Lösung ist

Lineare Funktionen

$$f(x) = \boldsymbol{m} \cdot x + \boldsymbol{t}$$

Steigung *y-Achsenabschnitt*



Wie bestimmt man die Steigung?

→ zeichne ein Steigungsdreieck ein und teile die senkrechte Länge Δ_y durch die waagrechte Länge Δ_x.

$$\boldsymbol{m} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{2}{1} = 2$$

Tipp für schnelles Ablesen der Steigung: „1 nach rechts und $\boldsymbol{m} = 2$ nach oben.“

Der Graph einer linearen Funktion ist immer eine **Gerade**.

Besondere Geraden:

- *Negative Steigung: Graph fällt* *(z.B. $m = -2$: 1 nach rechts, 2 nach unten)*
- *Steigung 0: waagrechte Gerade*

Bsp: Bestimme die Gerade durch die Punkte A(-2/4) und B(4/1).

○ Bestimmung der Steigung m

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-4}{4-(-2)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

○ Bestimmung von t

$$y = -\frac{1}{2}x + \boldsymbol{t}$$

$$4 = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + \boldsymbol{t}$$

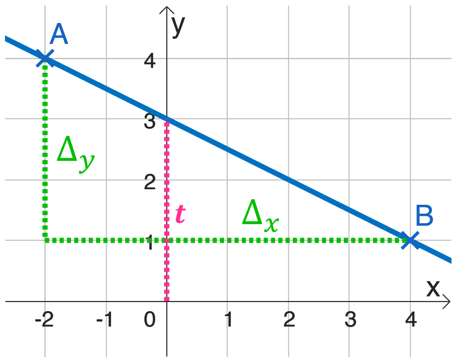
Einsetzen eines Punktes, hier A

$$4 = 1 + \boldsymbol{t}$$

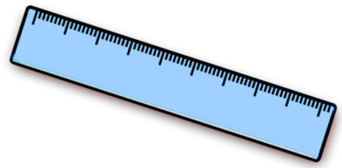
$$\boldsymbol{t} = 3$$

Nach $\boldsymbol{t}$ auflösen

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$



Lineare Gleichungen



z.B. $x - 5 = 5x + 1$

Wie löst man eine lineare Gleichung?

1. Vereinfachen (beide Seiten) 2. Alle $\boldsymbol{x}$ auf eine Seite. 3. Alle ***Zahlen*** auf die andere Seite. 4. Durch die Zahl vor x dividieren.	$7 - 4(x-2) = 24 - x$ $7 - 4x + 8 = 24 - x \quad \vert +x$ $15 - 3x = 24 \quad \vert -15$ $-3x = 9 \quad \vert : (-3)$ $x = -3$
5. Evtl. Probe: Lösung einsetzen	$7 - 4(-3 - 2) = 24 - (-3)$ $27 = 27$ ✔

Bsp: Prüfe, ob der Punkt C(3/-4) auf der Gerade $y = -3x + 5$ liegt.

$-4 = -3 \cdot 3 + 5$ *Setze den Punkt in die Geradengleichung ein.*

$-4 = -4$ ✔ *wahre Aussage → der Punkt liegt auf der Gerade.*

Lineare Gleichungssysteme

Bsp: *(I)* $x - y = -4$
(II) $2x + 2y = 20$

(Oft wie hier mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten)

Einsetzungsverfahren: *Löse eine Gleichung nach einer Variable auf:*

(I) $x = -4 + y$

Setze nun statt x in die zweite Gleichung $(-4 + y)$ ein:

(II)
$$2 \cdot (-4 + y) + 2y = 20$$
$$-8 + 2y + 2y = 20 \quad \vert +8$$
$$4y = 28 \quad \vert :4$$
$$y = 7 \quad \Longrightarrow \quad x = -4 + y = 3$$

(Es gibt auch noch andere Verfahren, mit denen man Lineare Gleichungssysteme lösen kann: z.B. Gleichsetzungsverfahren oder Additionsverfahren.)

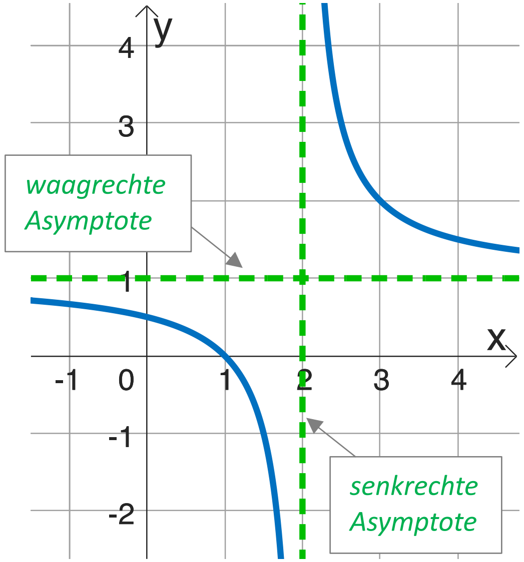
Gebrochen-rationale Funktionen

Haben eine **Variable im Nenner**

z.B. $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$

Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Nenner nicht Null



Asymptote: Gerade, der sich der Graph beliebig genau annähert.

- **Waagrechte** Asymptote $y = 1$
- **Senkrechte** Asymptote $x = 2$ (*nur bei der Definitionslücke*)

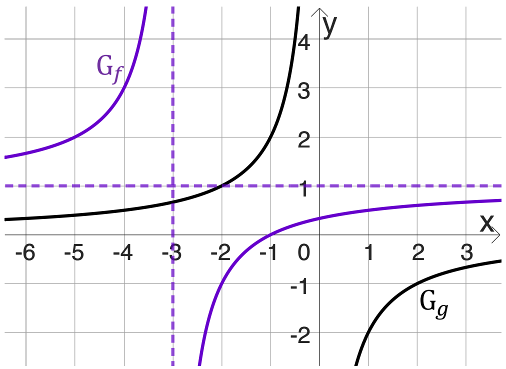
Besonderer Fall: Parameter a, b und c

$$f(x) = \frac{a}{x-b} + c$$

- Verschiebung um b nach rechts
- Streckung um $|a|$ in y-Richtung, Spiegelung an x-Achse für $a < 0$
- Verschiebung um c nach oben

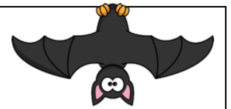
Bsp: Beschreibe, wie der Graph von $f: x \mapsto \frac{-2}{x+3} + 1$ durch Verschieben aus dem Graphen von $g: x \mapsto \frac{-2}{x}$ hervorgeht.

A: „Der Graph wurde um 3 nach links und um 1 nach oben verschoben."



Bruchgleichungen

(Ziel: Variable aus dem Nenner)



Einfacher Fall (*jeweils nur ein Bruch pro Seite*)

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{2x}$$ *über Kreuz multiplizieren*

$$2x = x + 3 \quad |-x$$

$$x = 3$$

Allgemein

$$\frac{-x}{x+2} + 1 = \frac{1}{x} \quad |\cdot x(x+2)$$ *mit allen Nennern multiplizieren*

$$-x^2 + (x^2 + 2x) = x + 2 \quad |-x$$

$$x = 2$$

Rechenregeln für Bruchterme (*wie bei Brüchen*)	
Brüche addieren/subtrahieren:	auf gleichen Nenner bringen, Zähler addieren
Brüche multiplizieren:	Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner
Brüche dividieren:	mit dem Kehrbruch multiplizieren

Doppelbruch
Hauptbruchstrich zu „:" umschreiben

Bsp. $\frac{1}{x^{-1}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 : \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{x}{1} = x$

erst kürzen ... *dann erweitern*

Bsp. $\frac{x+1}{x^2+x} + \frac{1}{2x} = \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{2}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2x}$

Bsp. $\frac{-1}{x} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ *Wo darf das Minus hin?*
→ Zähler, Nenner oder vor den Bruch

Quadratische Funktionen

Die Graphen heißen: Parabel

Bsp: $f(x) = x^2$ *Normalparabel*

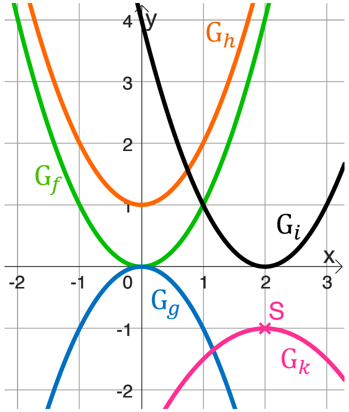
$g(x) = -x^2$ *(nach unten geöffnet)*

$h(x) = x^2 + 1$ *(1 nach oben verschoben)*

$i(x) = (x-2)^2$ *(2 nach rechts verschoben)*

$k(x) = -0{,}5(x-2)^2 - 1$ *Scheitel S(2/-1)*

(*Öffnungsfaktor* $-0{,}5$)



Es gibt drei verschiedene Schreibweisen:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ *(Allgemeine Form)*

Quadratische Ergänzung / *ausmultiplizieren*

Mitternachtsformel / *ausmultiplizieren*

$f(x) = a(x-d)^2 + e$ *(Scheitelpunktform)*

Vorteil: man sieht den **Scheitel** S(d/e)

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ *(Nullstellenform)*

Vorteil: man sieht die **Nullstellen** x_1 und x_2

Quadratische Ergänzung

Bsp: Bestimme die Scheitelpunktform von $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

$\underbrace{x^2 - 6x + 3^2} - 3^2 + 8 = 0$ (Ergänze zur binomischen Formel)

$(x-3)^2 - 9 + 8 = 0$

$(x-3)^2 - 1 = 0$ $\Longrightarrow$ Der Scheitel liegt bei $S(3/-1)$

Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form $ax^2 + bx + c = 0$

Lösen durch **Mitternachtsformel** *(geht immer)*	
$x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *„Diskriminante"*	Es gibt entweder - **zwei** Lösungen (*D*>0), - **eine** Lösung (*D*=0) oder - **keine** Lösung (*D*<0).

Bsp: Löse die Gleichung $0 = x^2 - 3x + 2.$

$x_{1/2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ *Zwei Lösungen, da D>0*

Manchmal geht es auch leichter:	
Wenn $c = 0$: **Ausklammern!**	Wenn $b = 0$: **Wurzel ziehen!**
Bsp: $5x^2 - 10x = 0$ $x(5x - 10) = 0$ $x_1 = 0$ $x_2 = 2$	Bsp: $3x^2 - 27 = 0 \quad \vert +27$ $3x^2 = 27 \quad \vert :3$ $x^2 = 9 \quad \vert \sqrt{}$ $\vert x \vert = 3 \Rightarrow x = \pm 3$

Bsp: Bestimme eine geeignete Gleichung zu den beiden gezeichneten Parabeln.

z.B. Scheitelpunktform: $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 1$

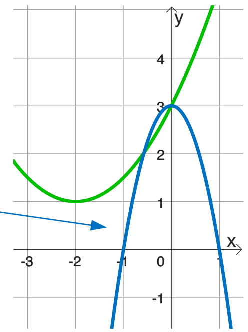
z.B. Nullstellenform: $y = a(x-1)(x+1)$

Nullstellen ablesen & Punkt einsetzen, z.B. *S(0/3)*

$3 = a(0-1)(0+1)$

$a = -3$

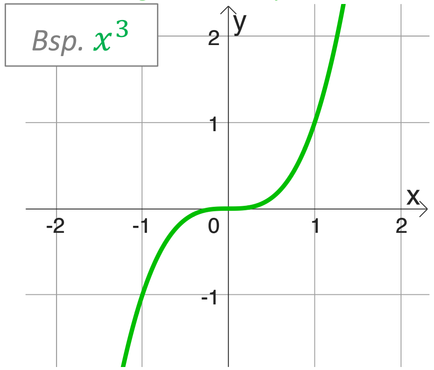
$y = -3(x-1)(x+1)$



Potenzfunktionen

$f(x) = a \cdot x^{n}$ *Grad der Funktion*

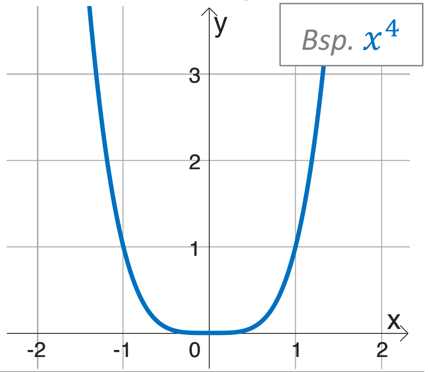
Ungerader Exponent



Punktsymmetrisch (zum Ursprung)

$f(-x) = -f(x)$

Gerader Exponent



Achsensymmetrisch (zur y-Achse)

$f(-x) = f(x)$

10. Klasse

Ganzrationale Funktionen (= Summe von Potenzfunktionen)

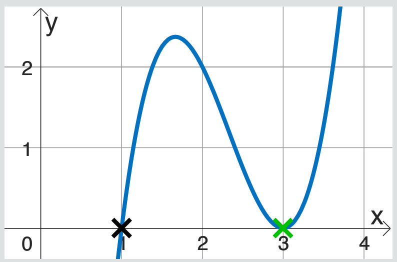
$$f(x) = \underbrace{a_n \cdot x^n + \cdots + a_1 \cdot x^1 + a_0 x^0}$$

Koeffizienten Polynom (vom Grad n: höchster Exponent)

Bsp. $f(x) = 2x^3 - 14x^2 + 30x - 18 \;=\; 2\,(x-1)\;(x-3)^2$

ausmultiplizieren ← / → *faktorisieren (könnt ihr meist nur bis Grad 2)*

$\underbrace{x_1 = 1}_{\text{einfache NST}}$ $\underbrace{x_2 = 3}_{\text{doppelte NST}}$



→ Bei doppelten (vierfachen…) NST wird die x-Achse nur berührt, sonst geschnitten.

n-te Wurzeln

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Bspe: $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$ $\qquad \sqrt[6]{5^2} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}}$

$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$ („Quadratwurzel“)

Definitionsmenge Unter der Wurzel darf nichts Negatives stehen

Bsp: $\sqrt{6-x} \quad \Longrightarrow \; 6 - x \geq 0 \quad \Longrightarrow \; x \leq 6$

Vorsicht: Wenn unter der Wurzel eine Variable steht, muss man eine Fallunterscheidung machen:

Bsp: $x^2 = 25 \;|\sqrt{\;}\quad \Longrightarrow \; |x| = 5 \quad \Longrightarrow \; x = \pm 5$

Rechnen mit Wurzeln

Vereinfachen bei · und :

$\sqrt{27} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{27 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9$

$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$

Achtung: bei + und - geht das **nicht**!

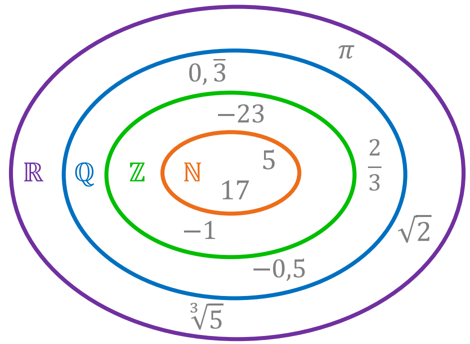
$\underset{= 3 + 4 = 7}{\sqrt{9} + \sqrt{16}} \neq \underset{= \sqrt{25} = 5}{\sqrt{9 + 16}}$

Tipp: schreibe jede Wurzel als Potenz & wende Potenzgesetze an:

$\sqrt{x \cdot \sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{4}}$

Zahlenmengen

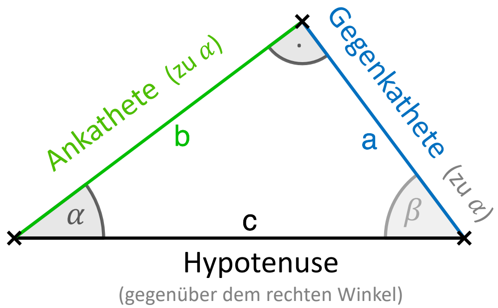
$\mathbb{N}$: Natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}$: Ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$: Rationale Zahlen
$\mathbb{R}$: Reelle Zahlen (rationale & irrationale)



Am rechtwinkligen Dreieck

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$



$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

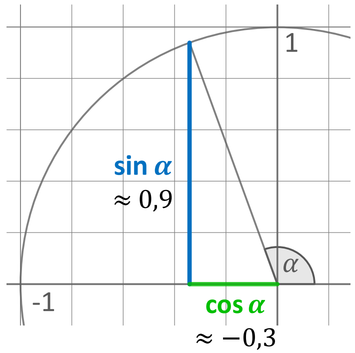
Bsp. Für das obere Dreieck gelte: $a = 3$, $c = 5$. Bestimme β.

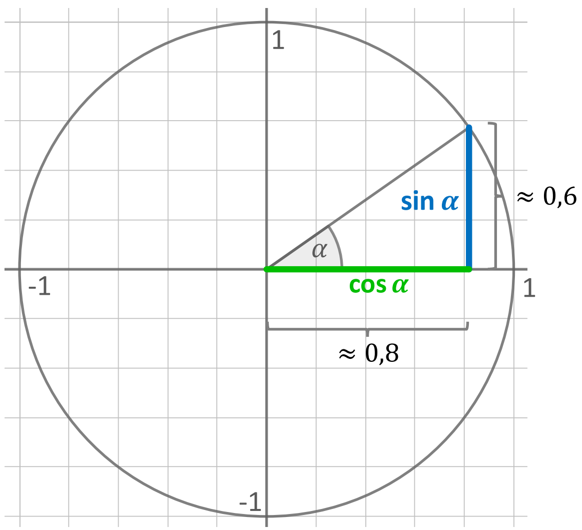
$\cos\beta = \frac{a}{c}$ *Taschenrechner:* $\cos^{-1}\frac{3}{5} \approx 53{,}13°$

Am Einheitskreis *(Radius 1)*

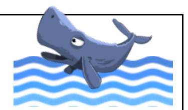
Der Radius ist 1, daher fällt bei sin und cos der Nenner weg und man kann den Wert gut ablesen.

Das geht sogar für Winkel größer als 90°, z.B. $\alpha = 110°$:

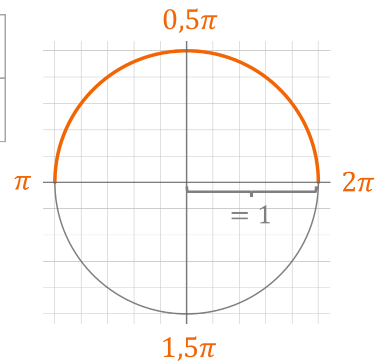




Bogenmaß



α (Gradmaß)	90°	180°	270°	360°
x (Bogenmaß)	$0{,}5\pi$	π	$1{,}5\pi$	2π



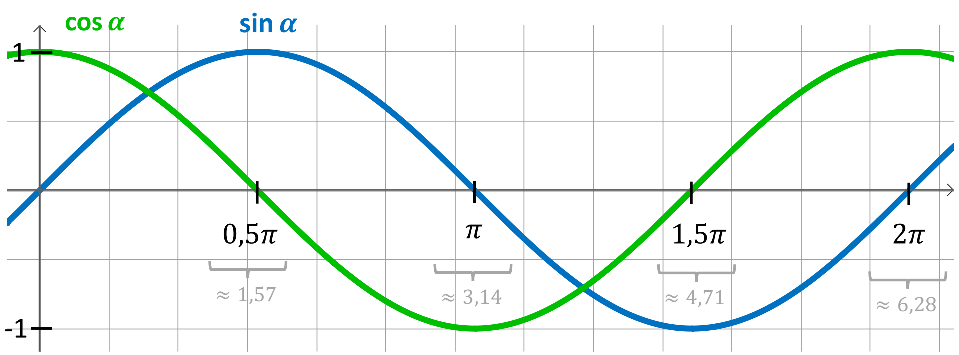
Umrechnung

$$\alpha = \underbrace{\frac{x}{2\pi}}_{\text{Anteil}} \cdot 360° \qquad x = \underbrace{\frac{\alpha}{360°}}_{\text{Anteil}} \cdot 2\pi$$

Taschenrechner Setup: $\underbrace{\textit{Deg}}_{\text{Degree}}$ *steht für Gradmaß und* $\underbrace{\textit{Rad}}_{\text{Radiant}}$ *für Bogenmaß*

Sinus- und Kosinus-Funktion

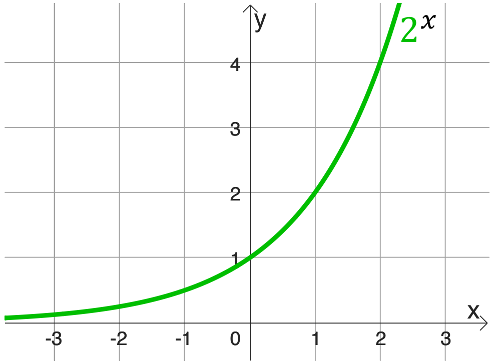
$D = \mathbb{R}$
$W = [-1; 1]$



Exponentialfunktion

$f(x) = a^x$ $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^+$

Wachstumsfaktor



Bsp: *Du legst 1€ mit einem festen Zinssatz an. Nach 50 Jahren sind es 45,26€. Wie hoch ist der Zinssatz?*

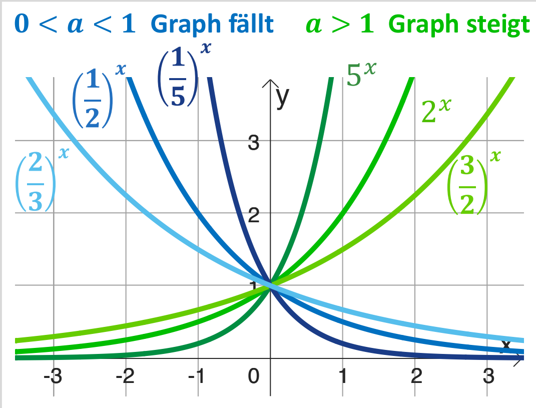
$a^{50} = 45{,}26 \quad |\sqrt[50]{}$

$a \approx 1{,}1 \quad \Longrightarrow$ *Der Zinssatz beträgt etwa 10%.*

Eigenschaften

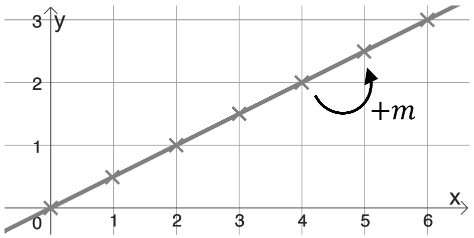
- Alle Graphen gehen durch den Punkt (0/1), da $a^0 = 1$.
- Es sind immer zwei Graphen achsensymmetrisch zur y-Achse: a^x und $\left(\frac{1}{a}\right)^x$.

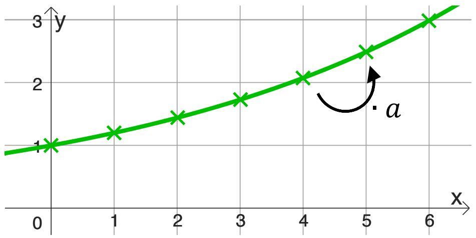
Bsp: Die Graphen von 2^x und $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ sind symmetrisch.



Tipp: Hier liest man den Wachstumsfaktor a am Graphen leicht ab.

Der Unterschied zwischen *linearem* **und** *exponentiellem* **Wachstum**





Exponentialgleichung

Logarithmus

$2^x = 8$

$log_2(8) = x$

Lies: *„Logarithmus von 8 zur Basis 2"*

Besonderheit: log_{10} kürzt man ab: lg

Bsp: $log_{10}(100) = \lg(100) = 2$

Logarithmus-Trick: Wie bekommt man das x aus dem Exponenten?

$3^{2x} = 5 \quad |\lg(\,)$ *Auf beiden Seiten lg anwenden.*

$\lg(3^{2x}) = \lg(5)$ *Den Exponenten 2x vor den lg ziehen.*

$2x \cdot \lg(3) = \lg(5) \quad |:\lg(3)$

$2x = \frac{\lg(5)}{\lg(3)} \quad |:2$

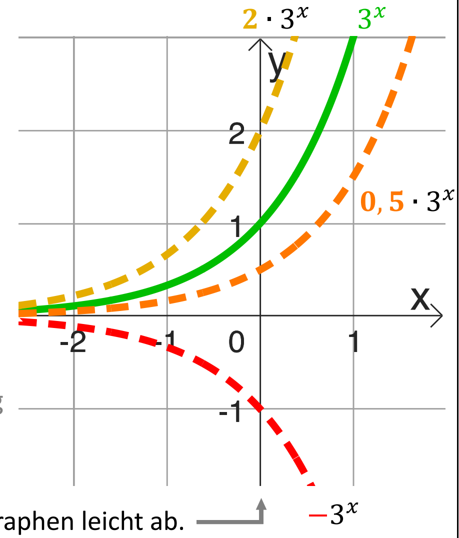
$x \approx 0{,}73$

Exponentialfunktion mit Parameter

$f(x) = b \cdot a^x$

Parameter (oft auch „Anfangswert")

- Bewirkt eine Streckung in y-Richtung
- Für $b < 0$: Spiegelung an x-Achse



Tipp: Hier liest man den Parameter b am Graphen leicht ab.

Bsp: Die Population einer bedrohten Tierart schrumpft jedes Jahr um 20%. Nach 3 Jahren sind es noch 128 Tiere. Wie viele waren es am Anfang (Anfangswert)?

$b \cdot 0{,}8^3 = 128 \quad |:0{,}8^3$

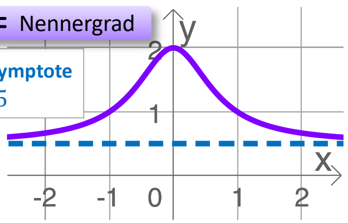
$b = 250$

$\Longrightarrow$ *Anfangs waren es 250 Tiere.*

Grenzwerte im Unendlichen $(x \to \pm\infty)$

Zählergrad = Nennergrad

Waagrechte Asymptote $y = 0{,}5$



$$f(x) = \frac{\mathbf{1}x^2 + 2}{\mathbf{2}x^2 + 1}$$

Tipp: Dieser Quotient ergibt die Asymptote: $\frac{1}{2}$ oder 0,5

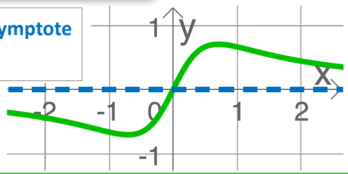
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0{,}5$$

(konvergent)

Sprich: *„Limes für x gegen plus/minus unendlich von f(x)"*

Zählergrad < Nennergrad

Waagrechte Asymptote $y = 0$



$$g(x) = \frac{x^1}{x^2 + 0{,}5}$$

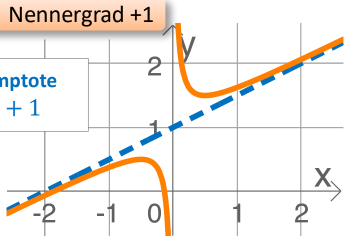
Tipp: Die Asymptote ist immer: $y = 0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$$

(konvergent)

Zählergrad = Nennergrad +1

Schiefe Asymptote $y = 0{,}5x + 1$



$$h(x) = \frac{4x^2 + 8x + 1}{8x^1}$$

Erweitern (mit 8x) ⇧ ⇩ Polynom-division

$$= \mathbf{0{,}5x + 1} + \frac{1}{8x}$$

Tipp: Hier findest du die Asymptote

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$

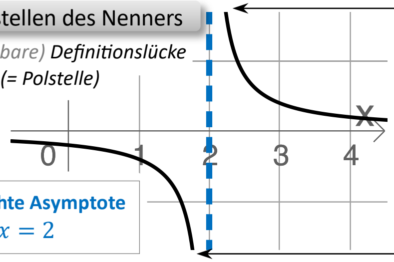
(divergent)

Grenzwerte an einer Stelle $(x \to x_0)$

Bei Nullstellen des Nenners

(nicht hebbare) Definitionslücke (= Polstelle)

Senkrechte Asymptote $x = 2$



$$k(x) = \frac{8}{5x - 10}$$

Tipp: Setze Werte knapp unter und über der Definitionslücke ein, hier: *1,999 und 2,001*

Rechtsseitiger Grenzwert d.h. von rechts an die 2

$$\lim_{x\to 2+} k(x) = +\infty$$

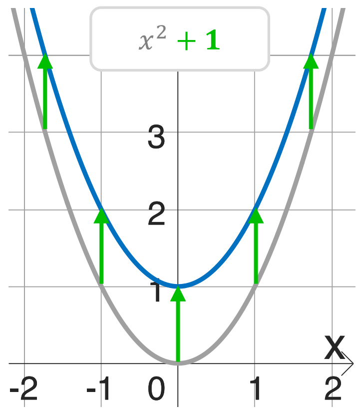
$$\lim_{x\to 2-} k(x) = -\infty$$

Linksseitiger Grenzwert d.h. von links an die 2

Verschieben

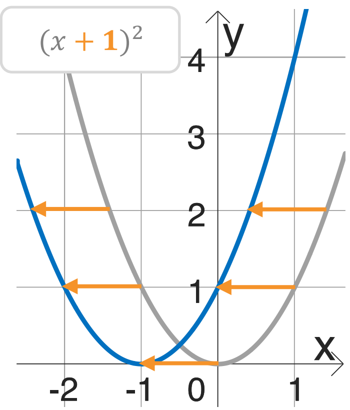
Für $c > 0$

... in y-Richtung



$f(x) + c$	Verschieben nach **oben**
$f(x) - c$	Verschieben nach **unten**

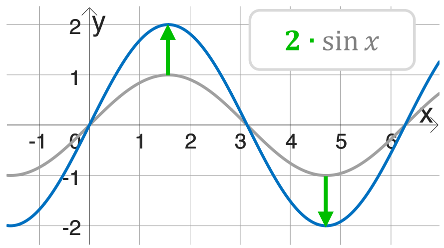
... in x-Richtung



$f(x + c)$	Verschieben nach **links**
$f(x - c)$	Verschieben nach **rechts**

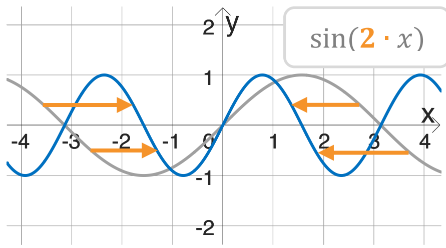
Strecken & Stauchen

... in y-Richtung



$c \cdot f(x)$	$c > 1$	Strecken
	$c < 1$	Stauchen

... in x-Richtung



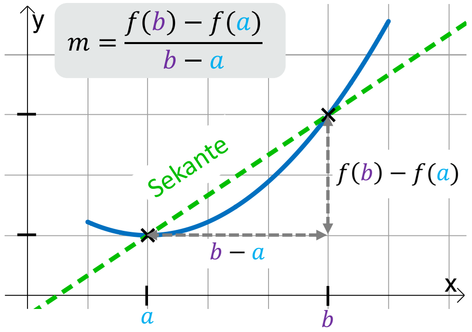
$f(c \cdot x)$	$c > 1$	Stauchen
	$c < 1$	Strecken

Für $c < 0$

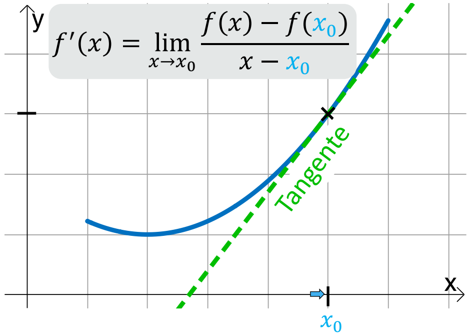
$-f(x)$	Spiegeln an x-Achse

$f(-x)$	Spiegeln an y-Achse

Differenzenquotient
(= mittlere Änderungsrate)



Differentialquotient
(= momentane/lokale Änderungsrate)



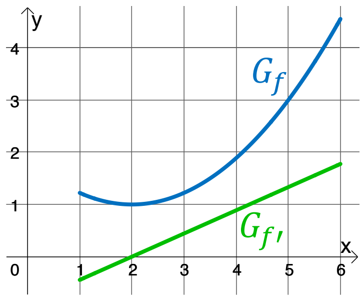
Steigung der Tangente ≙ Ableitung ≙ Differentialquotient

Steigungswinkel α (an einer Stelle x_0)

→ $\tan \alpha = f'(x_0)$

Ableitungsfunktion

→ *Wenn es keinen „Knick" gibt, kann man an jeder Stelle ableiten und damit die Ableitungsfunktion f' bilden.*



Ableitungsregeln

Potenzregel $f(x) = x^n \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Bsp: $f(x) = x^3 \implies f'(x) = 3 \cdot x^2$

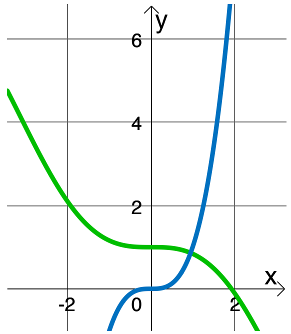
Faktorregel $f(x) = c \cdot g(x) \implies f'(x) = c \cdot g'(x)$

Bsp: $f(x) = 7 \cdot x^4 \implies f'(x) = 7 \cdot 4x^3$

Summenregel $f(x) = g(x) + h(x) \implies f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Bsp: $f(x) = x^3 + x \implies f'(x) = 3x^2 + 1$

Monotonie



Kriterium

$f'(x) > 0 \implies f$ **streng mon. steigend**

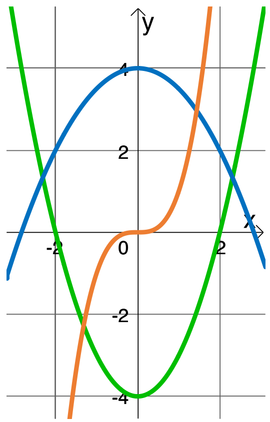
$f'(x) < 0 \implies f$ **streng mon. fallend**

(für alle $x \in I$) (im Intervall I)

Achtung: Der Kehrsatz $\Leftarrow$ gilt nicht:

Bsp: Für x^3 gilt: $f'(x) = 0$, trotzdem ist die Funktion überall str. mon. steigend

Extremstellen



Kriterium

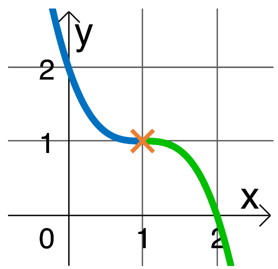
$f'(x_0) = 0$
f': VZW von + zu - } lokales Maximum bei x_0

$f'(x_0) = 0$
f': VZW von - zu + } lokales Minimum bei x_0

$f'(x_0) = 0$
f': kein VZW } Terrassenpunkt bei x_0

Maximum $\implies$ Graph hat Hochpunkt
Minimum $\implies$ Graph hat Tiefpunkt

Krümmung und Wendestellen



Kriterium

$f''(x) > 0 \implies f$ **linksgekrümmt**

$f''(x) < 0 \implies f$ **rechtsgekrümmt**

(für alle $x \in I$) (im Intervall I)

Bei Krümmungswechsel: **Wendepunkt**

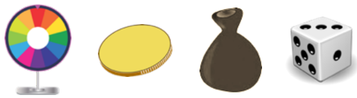
Begriffe *(8. Klasse)*

Bsp: Würfelwurf

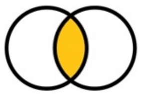
Ergebnis ω: Versuchsausgang von Zufallsexperimenten	$\omega_1 = 1$ $\omega_2 = 2$ …
Ergebnismenge Ω: Menge aller Ergebnisse	$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $\lvert\Omega\rvert = 6$ *„Mächtigkeit" von Omega*
Ereignis: Teilmenge der Ergebnismenge	$A = \{2; 4; 6\}$ *(„gerade Zahl würfeln")*
Gegenereignis $\overline{A}$: Enthält alle Ergebnisse, die nicht in A enthalten sind.	$\overline{A} = \{1; 3; 5\}$ *(„ungerade Zahl würfeln")*

Ω: großes Omega
ω: kleines Omega

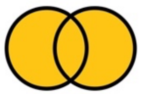
Wahrscheinlichkeit *(8. Klasse)*

Laplace-Experiment	*Nicht-Laplace-Experiment*
Alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich $P(E) = \dfrac{\text{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl mögliche Ergebnisse}}$  *Bsp: Zufallsgeneratoren*	Die Wahrscheinlichkeit kann nur über die relative Häufigkeit angenähert werden  *Bsp: asymmetrischer Würfel* *Sehr viele Wiederholungen nötig, um Wahrscheinlichkeit zu bestimmen*

Mengen und Vierfeldertafeln (9. Klasse)



Schnittmenge
$A \cap B$



Vereinigungsmenge
$A \cup B$

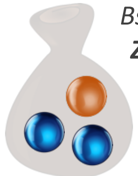
	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten

Pfadregeln und Baumdiagramme *(10. Klasse)*

1. Pfadregel: Entlang eines Pfades **multiplizieren**

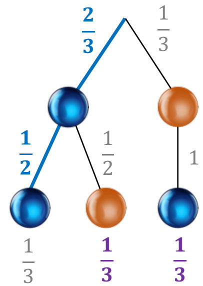
2. Pfadregel: Mehrere Pfade **addieren**



*Bsp. Du ziehst aus dieser Urne zwei Kugeln **ohne Zurücklegen**. Zeichne ein Baumdiagramm und bestimme die Wahrscheinlichkeiten.*

P(„zwei blaue") $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

P(„zwei verschiedenfarbige") $= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$



Bedingte Wahrscheinlichkeit & stoch. Unabhängigkeit *(11. Klasse)*

$P_A(B)$ ist die Wahrscheinlichkeit **von B unter der Bedingung A**

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Zwei Ereignisse A und B heißen (stochastisch) **unabhängig**, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

sonst: **abhängig**

Bsp. Bei einer Umfrage in der Sigena-Oberstufe wird gefragt:

A: „hast du ein **Auto?**"
B: „trägst du eine **Brille?**"

	B	$\overline{B}$	
A	5	5	10
$\overline{A}$	35	55	90
	40	60	100

Vierfeldertafel mit Häufigkeiten

a) Erkläre im Sachzusammenhang und bestimme:

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}05}{0{,}1} = 50\%$

Die Wahrsch., dass jemand von den Autobesitzern eine Brille trägt, ist 50%.

b) Prüfe, ob A und B unabhängig sind.

$P(A) \cdot P(B) = \frac{10}{100} \cdot \frac{40}{100} = 0{,}04$

$\nparallel$

$P(A \cap B) = \frac{5}{100} = 0{,}05$

Die Ereignisse A und B sind **abhängig**.

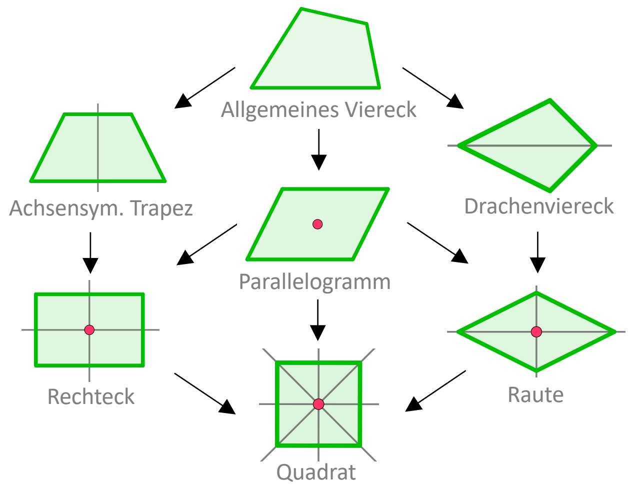
Figuren

Haus der Vierecke

7 Klasse

Achsensymmetrie: Achse(n)

Punktsymmetrie: Zentrum



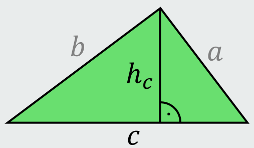
Dreieck

Flächeninhalt

$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

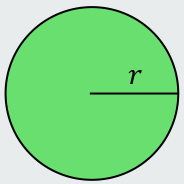
Winkelsumme

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



6./7. Klasse

Kreis



Umfang

$U = 2\pi r$

Flächeninhalt

$A = \pi r^2$

8. Klasse

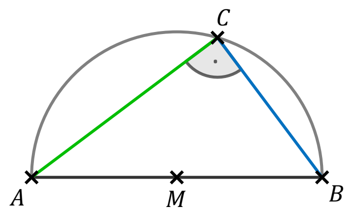
Satz des Thales

C liegt auf Thaleskreis über $\overline{AB}$

$\Rightarrow$ rechter Winkel bei C

(Die Umkehrung gilt auch)

7. Klasse



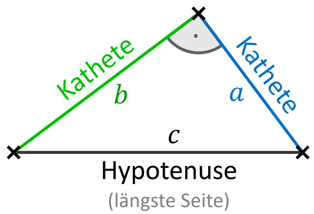
Satz des Pythagoras

Dreieck ist rechtwinklig

$\Rightarrow \; a^2 + b^2 = c^2$

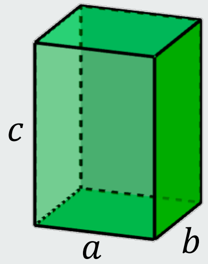
(Die Umkehrung gilt auch)

9. Klasse



Körper

Quader



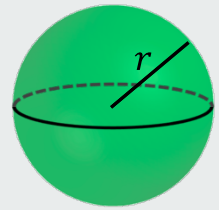
$V = a \cdot b \cdot c$

(Ein Quader ist auch ein Vierecksprisma)

6. Klasse

Kugel

$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

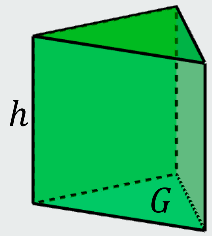


10. Klasse

Bsp: Um welchen Faktor vergrößert sich das Volumen einer Kugel, deren Radius verdoppelt wird?

Es verachtfacht sich, da $V = \frac{4}{3}\pi\,(2r)^3 = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi\, r^3$.

Prisma

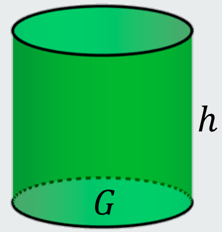


Zylinder

$V = G \cdot h$

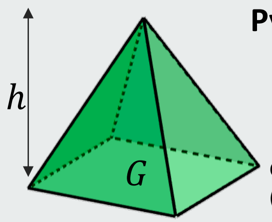
Grundfläche: Vieleck (*hier: Dreiecksprisma*)

Grundfläche: Kreis



8. Klasse

Pyramide

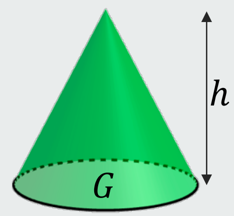


Kegel

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Grundfläche: Vieleck (*hier: Viereckspyramide*)

Grundfläche: Kreis



10. Klasse

Bsp: Bestimme den Radius eines Kegels, dessen Höhe 5m und Volumen 20m³ beträgt.

$20m^2 = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{(\pi r^2)}_{\text{Kreisfläche}} \cdot 5m \qquad \pi r^2 = 60m^2 : 5m \qquad r^2 = 12m^2 : \pi \qquad r \approx 1{,}95m$

RECHNEN MIT VARIABLEN

PRODUKTE

Produkt

Sortieren: $y \cdot 2y \cdot (-3x) = -6\,xy^2$

Vorzeichen *Zahlen* *Variablen*

Potenzen

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ | $7^3 \cdot 7^2 = 7^5$

$x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$ | $5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3$

$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ | $(5^3)^2 = 5^6$

***Tipp**: ausschreiben:* $(3x)^2 = 3x \cdot 3x$

$(3x)^{-2} = \frac{1}{3x \cdot 3x}$

SUMMEN

Summe: geordnet

gleichartige zusammenfassen $5ab - a^2b + ab$

gleiche Variablen & Exponenten $= 6ab - a^2b$

Summe: ungeordnet

Tipp: einkreisen & sortieren $m \cdot 5n^4 - 3n^4 \cdot m$

Danach wieder **gleichartige** zusammenfassen $= 5mn^4 - 3mn^4$

$= 2mn^4$

KLAMMERN AUFLÖSEN

± Klammer

Plus: $2 + (x - 5) = 2 + x - 5$

Minus: (Zeichen ändern) $2 - (x - 5) = 2 - x + 5$

Distributivgesetz

ausmultiplizieren

$2x \cdot (5 - 3x) = 10x - 6x^2$

ausklammern

Summen multiplizieren

$(6x - 5) \cdot (-1 + y)$

$= -6x + 6xy + 5 - 5y$

Binomische Formeln

Plusformel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Minusformel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Plusminusformel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Vorrangregel

Klammer vor **Punkt** vor **Strich**

(bei gleichen Zeichen: von links nach rechts)

$5 - 2 \cdot (4 - 1)$

$= 5 - 2 \cdot 3$

$= 5 - 6$

$= -1$